eme groupe iecs

CONCOURS 1988

MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATH I
Régime technologique

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 3

– Exercice –

Soit A une matrice carrée d'ordre p ($p \in \mathbb{N}^*$) à coefficients réels.

On pose $A^0 = I$

On suppose que : $A^3 + A^2 - A - I = 0$. (I désigne la matrice identité d'ordre p, et 0 la matrice nulle de même ordre).

1) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de I, A et A^2.

2) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \exists\, (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3,\ A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I,$

avec

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} &= -\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} &= \alpha_n + \gamma_n \\ \gamma_{n+1} &= \alpha_n \end{cases}$$

3) (a) Déterminer B, matrice carrée d'ordre 3 à coefficients entiers, telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

(b) Calculer B^2, B^3, B^4, B^5 et B^6.

4) Pour $r \in \mathbb{N}$, déterminer B^r en fonction de r. (On distinguera les cas r pair égal à $2n$, et r impair égal à $2n+1$ et on examinera les coefficients situés aux mêmes places).

5) (a) Exprimer $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ en fonction de B, n et $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire A^r ($r \in \mathbb{N}$) en fonction de r, I, A et A^2. (On distinguera les cas r pair et r impair).

6) Montrer, en changeant r en $-r$ dans la formule précédente, que le résultat obtenu vaut pour $r \in \mathbb{Z}$. (On distinguera encore les cas r pair et r impair et on utilisera les expressions de A^4 et A^3 en fonction de A^2, A et I).

T. S. V. P.

– Problème –

Les deuxième et troisième parties de ce problème sont indépendantes entre elles, mais utilisent les résultats de la première partie.

– Première partie –

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que

(a) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

(b) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$

(c) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \cdots + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$.

2) On dispose de morceaux de papier identiques au toucher. Sur chacun d'eux est inscrit un ensemble de nombres entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et n, de manière à ce que les ensembles de nombres inscrits soient tous distincts et que toutes les possibilités d'ensembles soient représentées, y compris un morceau de papier sans inscription.

On place ces morceaux de papier dans une urne $\mathcal{U}$ et on effectue un tirage au hasard d'un tel morceau, de manière équiprobable. On note X le nombre d'entiers inscrits sur le morceau tiré.

(a) Vérifier que X suit une loi binômiale dont on déterminera les paramètres.

(b) A l'aide du 1), calculer en fonction de n : $E(X), V(X)$ et $\sigma(X)$.

– Deuxième partie –

1) On dispose également d'une urne $\mathcal{V}$ contenant a boules blanches et b boules noires toutes identiques (a et b entiers naturels non nuls). On effectue alors l'expérience suivante : on tire un morceau de papier dans l'urne $\mathcal{U}$. Si le nombre d'entiers inscrits est k, on effectue alors dans $\mathcal{V}$ k tirages d'une boule qu'on remet dans $\mathcal{V}$ après chaque tirage.

On note Y le nombre de boules blanches obtenues.

(a) Pour $s \in [0,n]$ et $r \in [0,n]$, calculer $P(Y = s|X = r)$ en fonction de a, b, r et s.

(b) Montrer que si $0 \leq s \leq r \leq n$, $C_n^r C_r^s = C_n^s C_{n-s}^{r-s}$ et en déduire que Y suit une loi binômiale que l'on précisera.

(c) Exprimer $E(Y), V(Y)$ et $\sigma(Y)$ en fonction de n, a et b.

2) On fait varier a, en laissant b fixé, et on note alors Y_a la variable aléatoire Y.

Déterminer, pour $s \in [0,n]$, $\lim_{a \to +\infty} p(Y_a = s)$.

– Troisième partie –

On suppose dans cette partie que $n = a + b$. On effectue l'expérience suivante : on tire un morceau de papier dans l'urne $\mathcal{U}$; si le nombre d'entiers inscrits est k, on effectue un tirage simultané de k boules dans $\mathcal{V}$. On note Z le nombre de boules blanches obtenues.

1) (a) Pour $s \in [0,a]$ et $k \in [0,n]$, exprimer $p(Z = s|X = k)$ en fonction de a, b, s et k.

(b) Montrer que Z suit une loi analogue à celle de X.

(c) En déduire $E(Z), V(Z)$ et $\sigma(Z)$.

2) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Z).

3) Calculer la covariance du couple (X, Z) ainsi que le coefficient de corrélation $\rho(X, Z)$ de ce couple.

****

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail